

โครงร่างวิทยานิพนธ์
(Thesis Proposal)

ชื่อเรื่อง (ภาษาไทย)	โปรแกรมคอมพิวเตอร์เสมือนสำหรับจำลองการทำงานของมือจับหุ่นยนต์ประเภทยูนิเวอร์แซลแจมมิงกริปเปอร์
ชื่อเรื่อง (ภาษาอังกฤษ)	Computer Simulation of Universal Jamming Gripper
เสนอโดย	นายฐปน วรวิวัฒน์
รหัสนิสิต	5670176221
หลักสูตร	วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
ภาควิชา	วิศวกรรมคอมพิวเตอร์
คณะ	วิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
สถานที่ติดต่อ	ภาควิชาคอมพิวเตอร์ วิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
โทรศัพท์	080-550-2831
อีเมล	Tapana.v@student.chula.ac.th
อาจารย์ที่ปรึกษา	ดร.ณัฐพงศ์ ชินธเนศ
คำสำคัญ (ภาษาไทย)	โปรแกรมจำลองเสมือนจริง
คำสำคัญ (ภาษาอังกฤษ)	Physic Based Simulation

โปรแกรมคอมพิวเตอร์เสมือนสำหรับจำลองการทำงานของมือจับหุ่นยนต์ประเภท ยูนิเวอร์แซลแจมมิงกริปเปอร์

(Computer Simulation of Universal Jamming Gripper)

นายฐปน วรวิวัฒน์

1 กุมภาพันธ์ 2557

1. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

แต่เดิมงานทางด้านคอมพิวเตอร์กราฟิกและแอนิเมชันสามมิติจำเป็นต้องใช้บุคลากรสำหรับงานทางด้านศิลป์เป็นจำนวนมาก เพื่อใส่รายละเอียดการเคลื่อนไหวของตัวละครและวัตถุต่างๆให้มีการเคลื่อนไหวที่สวยงามและสมจริง แต่ยังมีสถานการณ์บางอย่างที่มีความละเอียดซับซ้อนเกินกว่าจะทำการปรับแต่งด้วยมือได้ เช่น การเคลื่อนไหวของใบไม้พร้อมกันจำนวนมากบนต้นเมื่อโดนลมพัด คลื่นในมหาสมุทรที่แทรกสอดกันไปมา เป็นต้น ด้วยปัญหาความซับซ้อนของธรรมชาติจึงทำให้เกิดงานทางด้านคอมพิวเตอร์กราฟิกแขนงใหม่ที่สนใจเอาความรู้ทางหลักฟิสิกส์ เช่น กฎของแรงกระทำ และ แรงโน้มถ่วง เข้ามาใช้ประกอบการคำนวณ จนทำให้สามารถคาดเดาและจำลองการเคลื่อนไหวของวัตถุต่างๆได้สมจริง

ในช่วงทศวรรษที่ผ่านมา โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ใช้จำลองการเคลื่อนที่ของวัตถุโดยอาศัยหลักฟิสิกส์ ได้ถูกนำไปประยุกต์ใช้ในงานทางด้านวิศวกรรมอย่างแพร่หลายในรูปแบบของการโปรแกรมคอมพิวเตอร์จำลองการทำงานเสมือนจริง เช่น การวิเคราะห์ความแข็งแรงของโครงสร้างอาคาร ทดสอบการทำงานร่วมกันของชิ้นส่วนต่างๆในเครื่องจักร รวมถึงการจำลองการทำงานของหุ่นยนต์ ซึ่งทำให้สามารถทดสอบสมมุติฐานต่างๆได้ โดยยังไม่จำเป็นต้องมีการสร้างชิ้นงานขึ้นมาทั้งหมดจริงๆ

การใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์จำลองการทำงานเสมือนจริงกับงานทางด้านหุ่นยนต์ ในระดับงานวิจัยจนถึงงานทางด้านอุตสาหกรรม สามารถทำให้อุตสาหกรรมทั้งด้านเงินและเวลาได้อย่างมาก ยกตัวอย่างเช่น เราสามารถทดสอบการทำงานของแขนหุ่นยนต์อุตสาหกรรมตามโปรแกรมที่ต้องการและทำซ้ำได้จำนวนมากโดยที่ไม่ก่อให้เกิดความเสี่ยงต่อความเสียหายที่อาจเกิดขึ้นได้ต่อตัวหุ่นยนต์เองและวัตถุโดยรอบขึ้น อีกทั้งการทดสอบด้วยแบบจำลองคอมพิวเตอร์ยังทำให้เป็นไปได้ที่จะจำกัดตัวแปรของระบบที่ต้องการทดสอบ โดยทำให้สามารถทดสอบปัญหาได้ตรงจุดและวิเคราะห์หาทางแก้ไขได้เร็วยิ่งขึ้น

การหยิบจับวัตถุด้วยหุ่นยนต์โดยอัตโนมัติเป็นปัญหาที่ได้รับความสนใจปรับปรุงแก้ไขมาอย่างต่อเนื่องในวงการงานวิจัยหุ่นยนต์มาหลายทศวรรษ และการใช้โปรแกรมจำลองเสมือนก็เป็นส่วนสำคัญที่ถูกนำมาใช้ทดสอบเพื่อที่จะวัดผลการทดลองหรือทดสอบสมมุติฐานใหม่ โดยมีเป้าหมายในการที่จะเพิ่มความสามารถของหุ่นยนต์ให้หยิบจับวัตถุได้อย่างหลากหลาย ดังนั้นในช่วงเวลาที่ผ่านมาจึงได้มีการออกแบบมือจับหุ่นยนต์ออกมาหลายชนิด โดยมือจับของหุ่นยนต์ที่มีองศาอิสระมากก็จะทำให้หยิบจับวัตถุได้หลากหลายรูปร่างมากขึ้น แต่ในขณะเดียวกันก็ทำให้การคำนวณว่าจะต้องวางนิ้วมือของหุ่นยนต์ตรงไหนบ้างเพื่อให้จับวัตถุได้โดยไม่ตกหล่นก็จะยากขึ้นเช่นเดียวกัน เพื่อให้การทดสอบทฤษฎีหรือแนวคิดใหม่ๆ เป็นไปได้ง่าย รวดเร็ว และสามารถทดสอบได้จำนวนครั้งมากๆ จึงมีการนำมือจับเหล่านี้มาทำแบบจำลองเสมือนเพื่อให้นักวิจัยสามารถทำการทดสอบได้โดยมีจำเป็นต้องใช้แขนและมือจับหุ่นยนต์จริง

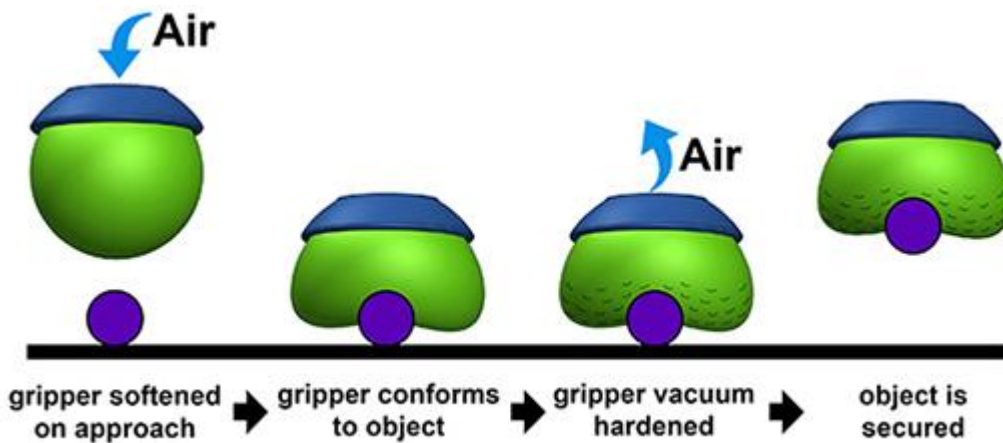
ในปี 2010 ได้มีงานวิจัยที่ออกแบบมือจับหุ่นยนต์ชนิดใหม่ขึ้นมา มีชื่อว่า Universal Jamming Gripper [1] เป้าหมายของการออกแบบมือจับแบบใหม่นี้ต้องการที่จะแก้ปัญหาเรื่องความซับซ้อนที่ใช้ในการคำนวณวิธีการจับวัตถุของหุ่นยนต์ โดยอาศัยหลักการเปลี่ยนแปลงคุณสมบัติทางกลของวัสดุประเภททราย ที่ในภาวะทั่วไปสามารถไหลได้อย่างอิสระเหมือนของไหล แต่เมื่อมีแรงจากภายนอกเข้ามาอัดเม็ดทรายเข้าหากันจะทำให้เม็ดทรายล็อคกันแน่นเป็นก้อนและทำให้มีคุณสมบัติเหมือนของแข็ง โดยมือจับหุ่นยนต์ชนิดนี้มีผิวภายนอกเป็นยางยืดหยุ่นได้ภายในบรรจุวัตถุประเภททรายดังในรูปที่ 1 และมีวาล์วด้านบนที่สามารถปั๊มอากาศเข้าออกได้ตามคำสั่ง ขั้นตอนการทำงานสำหรับการหยิบจับวัตถุจะแบ่งออกเป็น 4 ขั้นตอนดังในรูปที่ 2 โดนขั้นแรกจะทำปั๊ม

อากาศเข้าไปภายใน เพื่อให้เกิดช่องว่างทำให้เม็ดทรายภายในเคลื่อนที่ได้อย่างอิสระ จากนั้นจึงเอามือจับบอลลูนออกแรงกดทับลงไปบนวัตถุที่ต้องการ ด้วยแรงกระทำจะทำให้มือจับเปลี่ยนรูปร่างไปตามวัตถุ ในขั้นที่ 3 ทำการดูดอากาศออกจากภายใน ทำให้ผิวยางรอบบอลลูนตัวแน่นบีบเม็ดทรายเข้าหากันจนกลายเป็นของแข็งลึกลับวัตถุที่ต้องการจับไว้ภายใน ขั้นสุดท้ายเมื่อมือจับแข็งตัวก็จะสามารถยกมือจับขึ้นได้โดยที่วัตถุไม่ตกลง

ด้วยลักษณะการทำงานของ Universal Jamming Gripper ที่มีการเปลี่ยนแปลงสถานะทางกลของวัตถุที่อยู่ภายในไปมา ระหว่างของเหลวกับของแข็ง ในปัจจุบันยังไม่มีโปรแกรมคอมพิวเตอร์หรืองานวิจัยใดๆที่นำเสนอวิธีการจำลองการทำงานของมือจับชนิดนี้ ในงานวิจัยนี้จึงมุ่งเน้นที่จะสร้างโมเดลจำลองทางฟิสิกส์ของมือจับหุ่นยนต์ชนิดนี้และนำมาสร้างโปรแกรมจำลองการทำงานงานเสมือนจริง เพื่อให้สามารถนำมาใช้ประโยชน์ต่อไปในอนาคต



รูปที่ 1 Universal Jamming Gripper [1]



รูปที่ 2 การทำงานของ Universal Jamming Gripper [1]

2. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

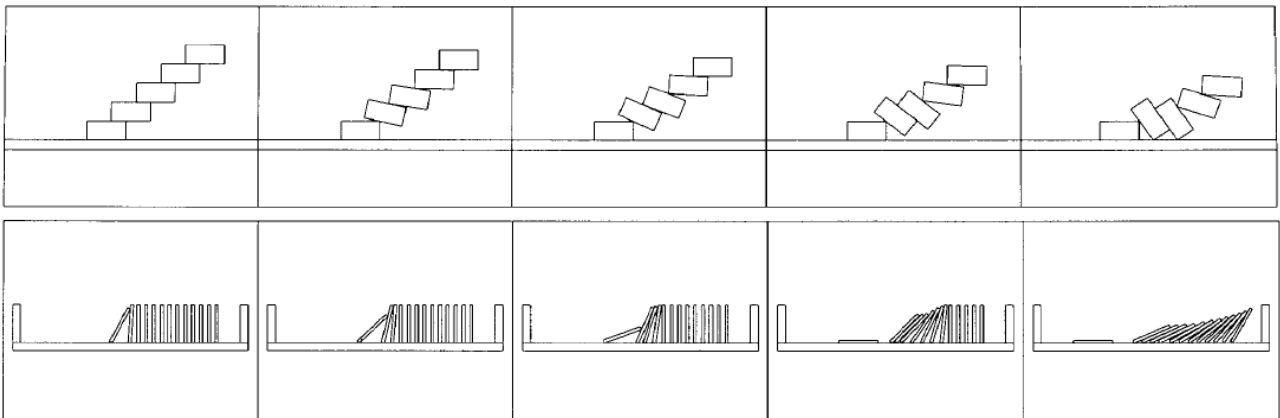
แบบจำลองทางฟิสิกส์สำหรับโปรแกรมคอมพิวเตอร์จำลองเสมือน ของ Universal Jamming Gripper เป็นมือจับหุ่นยนต์ที่อาศัยการทำงานของวัสดุหลายๆชนิดเข้าด้วยกัน ประกอบไปด้วย วัตถุแข็งเกร็ง, วัตถุที่ยืดหยุ่นได้, อากาศ และ วัสดุประเภททราย ดังนั้นจึงต้องศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องของการสร้างโปรแกรมจำลองของวัสดุแต่ละชนิด และการศึกษาวิธีการที่จะนำทุกชิ้นมารวมกันเพื่อทำให้การถ่ายทอดแรงไปมาระหว่างวัสดุวัตถุแต่ละชนิดในมือจับ Universal Jamming Gripperไปได้

2.1. การจำลองวัตถุแข็งเกร็ง

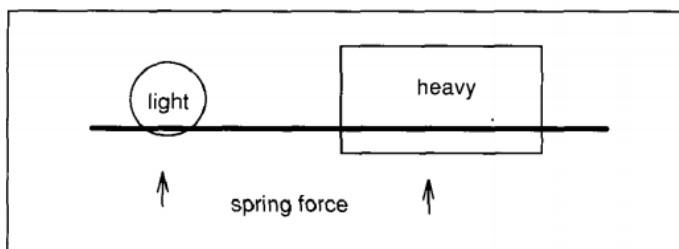
การจำลองของวัตถุแข็งเกร็งเป็นงานสายคอมพิวเตอร์กราฟิกที่ยกขึ้นมาศึกษาเป็นอย่างแรกๆ มีการวิเคราะห์และจัดเป็นหมวดหมู่อยู่ในงานวิจัยของ [2] ปัญหาสำคัญของจำลองวัตถุแข็งเกร็งคือการจัดการเมื่อวัตถุสองชิ้นชนกัน ที่จะต้องมีเงื่อนไขว่าไม่ให้ ส่วนใดก็ตามของแต่ละชิ้นทะลุเข้าไปในอีกชิ้น โดยสามารถแบ่งย่อยวิธีการได้ออกเป็น 2 วิธี หนึ่งคือการใช้วิธีทำโทษ เมื่อพบว่าวัตถุเคลื่อนที่ทะลุเข้าไปในอีกชิ้นหนึ่ง อีกวิธีการหนึ่งคือ การวิเคราะห์หาเวลาที่เกิดการชนกันระหว่างเฟรมขึ้น

การใช้วิธีทำโทษ[3] เมื่อพบว่าวัตถุเคลื่อนที่ทะลุเข้าไปในอีกชิ้นหนึ่ง จะทำใส่แรงเข้าไปในทิศตรงกันข้ามเพื่อที่จะดันให้วัตถุแยกออกจากกันคล้ายแรงจากสปริง วิธีนี้เป็นวิธีที่สามารถทำได้ง่ายแต่จะพบทำให้พบปัญหาได้อย่างในรูปที่ 4 วัตถุน้ำหนักมากจะทะลุเข้าไปในผิวได้มากกว่าวัตถุที่มีน้ำหนักน้อยสำหรับเวลาของเฟรมที่เท่ากัน เพื่อให้เป็นไปตามเงื่อนไขข้างต้นจึงต้องใส่แรงการทำในทิศตรงข้ามในปริมาณที่มากขึ้นเพื่อให้สามารถดันวัตถุที่มีน้ำหนักมากออกไปให้พ้นผิวได้ แต่การใส่แรงกระทำที่มากจะทำให้ต้องใช้เวลาของเฟรมการจำลองที่เล็กมากๆ เพื่อให้ระบบมีความเสถียร

การวิเคราะห์เวลาที่เกิดการชนขึ้นโดยตรง[4] เนื่องจากแรงที่เกิดจากการชนกันนั้นคือการดล ซึ่งจะมีแรงกระเด็นกลับมากในเวลาที่สั้นๆเท่านั้น การหาเวลาที่เกิดการชนได้อย่างแม่นยำจึงเป็นจำเป็นในการที่จะคำนวณแรงที่กระเด็นออกของวัตถุแต่ละชิ้นได้อย่างถูกต้อง ซึ่งวิธีนี้เมื่อพบว่าวัตถุมีการชนกันเกิดขึ้นจะค่อยๆ คำนวณเวลาย้อนไปจนพบจุดที่เริ่มเกิดการชน แล้วจึงคำนวณแรงลัพท์ออกมา ณ เวลานั้นๆ นอกจะได้แรงที่ถูกต้องแล้ววิธียังทำให้สามารถใช้ เวลาของแต่ละเฟรมแทนช่วงเวลาที่ยาวขึ้นได้มากกว่าวิธีแรกมาก ซึ่งหมายถึงจำนวนเฟรมที่ต้องมีการคำนวณน้อยลง และ ทำให้ใช้เวลาการจำลองรวมทั้งหมดน้อยลงด้วย



รูปที่ 3 ตัวอย่างการจำลองวัตถุแข็งเกร็ง การตกของก้อนอิฐที่ไม่สมดุล(บน) การล้มต่อเนื่อง(ล่าง) [2]



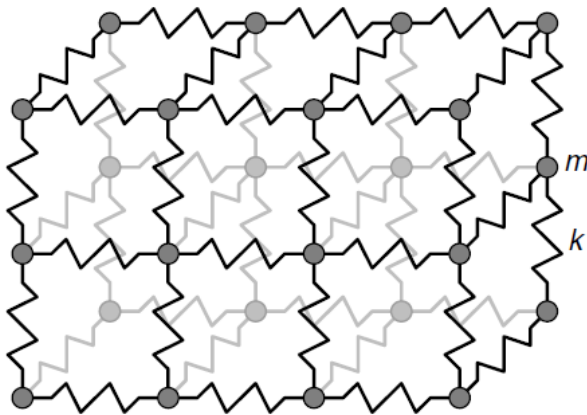
รูปที่ 4 ระยะเวลาที่ทะลุเข้าไปของวัตถุไม่เท่ากันขึ้นกับน้ำหนัก เมื่อใช้วิธีการคำนวณแบบทำโทษ [2]

2.2. การจำลองวัตถุยืดหยุ่น

การจำลองวัสดุที่ยืดหยุ่นได้ เป็นแนวทางวิจัยที่ต่อยอดมาจากการจำลองวัตถุแข็งเกร็ง โดยมีแนวทางในการจำลองได้

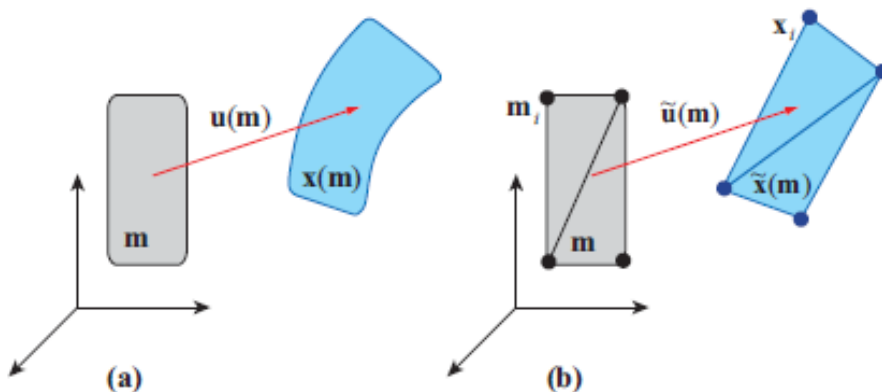
หลายวิธี ทั้งในรูปแบบของการใช้เงื่อนไขกับรูปทรงของวัตถุที่ต้องการจำลองและแบบที่อิงตามหลักโมเดลฟิสิกส์ ซึ่งในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ จะกล่าวถึงเฉพาะวิธีที่เป็นไปตามหลักฟิสิกส์และนิยมนำมาใช้ในงานคอมพิวเตอร์กราฟิกปัจจุบัน สำหรับรายละเอียดงานวิจัยอื่น ๆ ของการจำลองวัตถุยืดหยุ่น สามารถอ่านเพิ่มเติมได้จากงานวิจัย [5,6]

ในงานวิจัย [7] เป็นงานที่ได้เสนอการจำลองวัสดุยืดหยุ่นอย่างผิวหน้ามนุษย์ ด้วยการแทนโครงสร้างของวัตถุด้วยจุดมวลที่เชื่อมกันด้วยแรงของสปริง และมีโครงสร้างการเชื่อมกับความตึงของสปริงหลายแบบตามลักษณะของกล้ามเนื้อใบหน้าแต่ละชั้น การใช้จุดมวลกับสปริงถึงแม้จะทำความเข้าใจและสร้างได้ง่ายแต่ก็เป็นการแทนแรงที่เกิดขึ้นในวัสดุได้เพียงคร่าวๆ เท่านั้น เนื่องจากถ้าจำนวนของจุดมวลไม่มีความละเอียดเพียงพอ ก็จะทำให้การบิดงอไม่สมจริง หรือ การปรับแต่งค่าการโค้งงอของวัสดุบางชนิดจะทำได้ยากเนื่องจากระบบนี้สามารถปรับได้เพียงค่าความตึงของสปริงเชื่อมเท่านั้น



รูป 5 โครงสร้างที่ประกอบขึ้นจากจุดมวลเชื่อมกันด้วยสปริงที่มีจุดมวลน้ำหนัก m และค่าความแข็งของสปริง k [2]

เพื่อการจำลองวัสดุยืดหยุ่นในมีความสมจริงมากยิ่งขึ้นจึงมีงานวิจัย[8,9] นำสมการต่อเนื่องของรูปทรงตั้งต้นมาใช้ Finite Element Method(FEM) ทำการประมาณสมการตั้งต้นให้อยู่ในรูปที่คำนวณได้ง่าย โดยเริ่มต้นจากรูปทรงของวัตถุก่อนที่จะมีการบิดงอ และ สมการที่อธิบายการงอของวัตถุเทียบกับแรงภายในที่เกิดขึ้น ทำให้ผลของแรงกระทำภายนอกที่ตกลงบนวัตถุจะสามารถหาได้จาก การงอของวัตถุที่จะได้พลังงานเทียบเท่ากับพลังงานที่เกิดจากแรงกระทำภายนอก แต่โดยทั่วไปสมการอธิบายการงอของวัตถุของวัตถุจะอยู่ในรูปของสมการ Partial Derivative Equation (PDE) ที่ไม่สามารถนำมาใช้หาคำตอบได้โดยตรงได้ง่ายจึงต้องใช้ FEM มาแปลงสมการให้อยู่ในรูปที่สามารถคำนวณโดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้



รูปที่ 6 รูปทรงการงอของวัตถุเทียบกับค่าเริ่มต้น(ซ้าย) รูปทรงผ่านการประมาณโดยใช้ FEM(ขวา) [6]

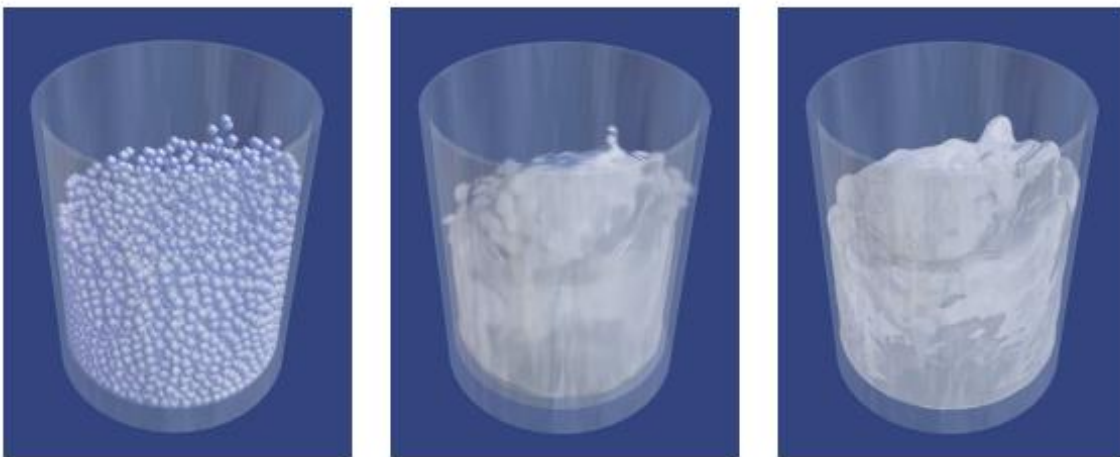
2.3. การจำลองของไหล

ปัญหาการจำลองของไหล เช่นการไหลของน้ำหรือการฟุ้งของแก๊สในอากาศ เป็นหัวข้อหนึ่งในงานวิจัยทางด้าน

คอมพิวเตอร์กราฟิก ที่ได้รับความสนใจมานานและได้มีการเสนอวิธีการที่หลากหลายสำหรับการจำลองออกมาให้มีความเหมือนจริงมากที่สุด งานวิจัยทางเกี่ยวกับการจำลองของไหลโดยใช้กลวิธีที่อิงตามหลักฟิสิกส์สามารถแบ่งออกได้เป็น 2 ประเภทหลักๆ

การจำลองของไหลด้วยระบบของอนุภาค (Smooth Particle Hydrodynamics) นำเสนอครั้งแรกในงานวิจัย [10] โดยอนุภาคแต่ละจุดจะแทนการมีอยู่ของของไหลที่จุดนั้น ถ้ามีอนุภาคที่บริเวณใดเป็นจำนวนมากจะหมายถึงบริเวณนั้นมีความหนาแน่นของไหลที่สูง ซึ่งทำให้เป็นบริเวณที่มีแรงดันสูงกว่าบริเวณรอบๆ เมื่อสามารถคำนวณแรงดันที่เกิดขึ้นในแต่ละจุดได้ ก็สามารถแปลงออกมาเป็นแรงที่กระทำบนแต่ละอนุภาคได้ กล่าวโดยทั่วไปคือ จะเกิดแรงกระทำในทิศที่พุ่งจากจุดที่มีแรงดันมากไปหาจุดที่มีแรงดันน้อย ซึ่งในท้ายที่สุดแล้วถ้าไม่มีแรงกระทำจากภายนอกเข้าเพิ่มเติม จะทำให้ระบบพยายามเข้าสู่สมดุล โดยแต่ละอนุภาคจะมีทิศของความเร็วพุ่งออกไปยังจุดที่มีแรงดันต่ำกว่า จึงทำให้กระจายตัวออกไปในทุกบริเวณในปริมาณที่เท่าๆกัน

การใช้ระบบอนุภาคในการจำลองของไหลมีข้อดีคือ การทำงานที่ตรงไปตรงมาเข้าใจได้ง่าย สามารถเก็บรายละเอียดการเคลื่อนที่ของของไหลได้ดี เหมาะสำหรับการจำลองของไหลในปริมาณน้อยๆ เนื่องจาก ถ้าต้องการจำลองในระบบที่ใหญ่จะจำเป็นต้องใช้อนุภาคเป็นจำนวนมาก ซึ่งการคำนวณที่ต้องทำทุกอนุภาคนั้นจะทำให้การจำลองการทำงานแต่ละเฟรมนั้นกินเวลานานเกินไป เช่น การจำลองคลื่นของมหาสมุทร เป็นต้น



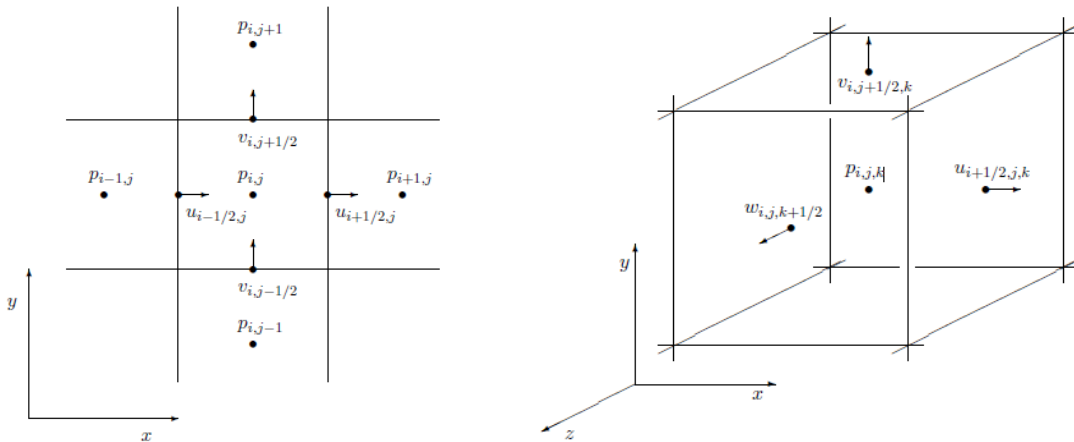
รูปที่ 7 การจำลองน้ำด้วยอนุภาคจากงานวิจัย [24]

เนื่องจากปัญหาของการจำลองของไหลด้วยอนุภาคนั้นไม่สามารถจำลองระบบที่มีขนาดใหญ่ได้เท่าที่ควรจะเป็น จึงเกิดแนวคิดใหม่ที่จะมองการแทนข้อมูลการจำลองในอีกลักษณะหนึ่งที่ได้อธิบายไว้ใน [11] โดยแทนที่จะคำนึงถึงว่าอนุภาคแต่ละจุดข้อมูลและความเร็วเป็นเท่าไร จะมองว่าบริเวณจุดที่สนใจควรจะมีความเร็วเป็นเท่าไร ซึ่งจะมีการเก็บตัวแทนเฉลี่ยของข้อมูลในจุดบริเวณใกล้เคียงเท่านั้น ซึ่งนิยมเก็บในรูปของ MAC Grid ที่เป็นตารางสี่เหลี่ยมในสองมิติและ รูปลูกบาศก์สำหรับการจำลองในสามมิติ ดังรูปที่ 8 โดยทั่วไปจะค่าแรงดันไว้ที่กึ่งกลางช่อง และ ความเร็วจะถูกเก็บไว้ที่ผนังของช่อง ซึ่งการเก็บข้อมูลแบบนี้ทำให้ลดปริมาณงานที่ต้องใช้ในการคำนวณลงและ ง่ายต่อการคำนวณ ค่าต่างๆอย่างมาก เช่น ความเร่งที่จุดกึ่งกลางตารางสามารถหาได้จากการเอาความเร็วที่เก็บอยู่ที่ผนังฝั่งขวาด้วยความเร็วที่ผนังฝั่งซ้ายได้โดยตรง หรือ ความเร่งที่เกิดขึ้นจากแรงดันก็สามารถหาได้จากการนำแรงดันเก็บไว้ตรงกลางช่อง ลบกับแรงดันที่จุดกึ่งกลางของช่องข้างๆ ก็จะได้ความเร็วที่เปลี่ยนไป ตรงผนังช่อง เป็นต้น

ตามที่ยกตัวอย่างไปก่อนหน้านี้ ถึงแม้ว่าวิธีจะดูยุ่งยากในการทำความเข้าใจในตอนแรก แต่ในทางปฏิบัตินั้นสามารถทำ

การคำนวณค่าต่างๆได้เร็วและง่ายกว่ามาก แต่วิธีนี้ก็ยังมีข้อเสียคือ ที่จุดบริเวณขอบของของไหล คือจะไม่สามารถเห็นการเปลี่ยนแปลงของค่าต่างในระดับได้เล็กกว่าขนาดของตารางที่นำมาใช้ ดังนั้นขนาดของตารางที่นำมาใช้เก็บข้อมูลจึงต้องมีการปรับใช้ให้เหมาะสมให้มีความละเอียดมากเพียงพอกับงานที่ต้องการ

แม้ว่าในเบื้องต้นความละเอียดของการจำลองของไหลจะขึ้นกับขนาดของตาราง แต่งานวิจัยต่อมาก็ได้มีการประยุกต์เทคนิคต่างๆเพื่อให้สามารถเก็บข้อมูลได้ละเอียดมากขึ้นได้โดยที่ไม่ทำให้การคำนวณช้าลงเท่าใดนัก เช่น ตารางเก็บข้อมูลที่สามารถปรับเปลี่ยนความละเอียดเพิ่มมากขึ้นเฉพาะบริเวณที่มีความจำเป็นได้[12] , เทคนิคการประมาณว่าช่องที่อยู่ขอบของของไหลที่ส่วนที่ว่างอยู่เป็นอัตราส่วนเท่าไรเทียบกับขนาดของช่อง [13] , การนำข้อดีของทั้งสองระบบมารวมกันโดยเก็บข้อมูลไว้ก่อนหน้าก่อนแล้วโปรเจกต์ข้อมูลต่างๆลงบนตารางเพื่อทำการคำนวณ เมื่อคำนวณเสร็จจึงนำข้อมูลใส่กลับเข้าไปในอนุภาค [15]

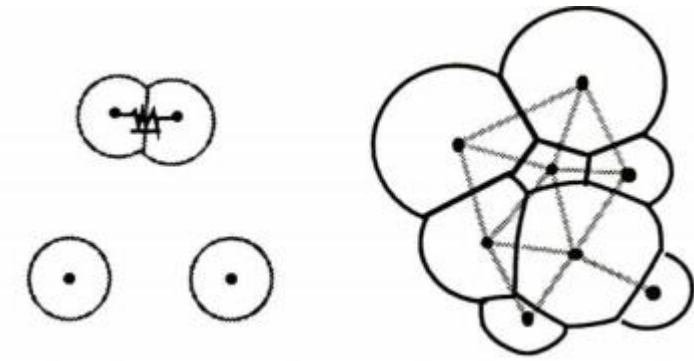


รูปที่ 8 โครงสร้างตาราง MAC Grid ในสองมิติ(ซ้าย) ในสามมิติ(ขวา) [11]

2.4. การจำลองทราย

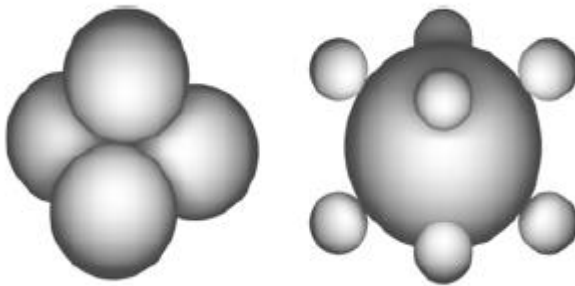
การจำลองวัสดุประเภททรายนั้นมีความซับซ้อนกว่าวัสดุอื่นๆเนื่องจากทรายมีคุณลักษณะที่เป็นได้ทั้งของไหลและของแข็ง ในสภาวะปกติทรายจะสามารถไหลได้โดยอิสระเหมือนของไหลและสามารถฟุ้งในอากาศได้ แต่เมื่อมีแรงบีบอัดเม็ดทรายเข้าหากันจะทำให้ลึอกตัวกันเป็นของแข็ง เช่นการคงอยู่ในสภาพเป็นกองทราย ซึ่งในงานวิจัยที่ผ่านมาได้มีการจำลองโดยอาศัยระบบอนุภาค และการใช้ระบบตารางแบบที่ใช้ในของไหล

ในงานวิจัย[15] เป็นงานทางด้านคอมพิวเตอร์กราฟิกชิ้นแรกๆที่ได้มีการศึกษาคุณสมบัติของวัสดุประเภท และได้นำเสนอถึงโมเดลที่สามารถจำลองพฤติกรรมของทรายได้อย่างเหมาะสม มีการนำเสนอให้แทนเม็ดทรายด้วยอนุภาคที่มีแรงดึงดูดเข้าหากันเล็กน้อยเมื่ออยู่ใกล้ๆกัน เมื่อเกิดการชนกันระหว่างอนุภาค จะยอมให้รูปร่างของอนุภาคมีการเปลี่ยนรูปร่างไปจากทรงกลมปกติตามแรงที่เกิดขึ้น ดังในรูปที่ 9 ด้วยการทำแบบนี้จะทำให้อนุภาคสามารถก่อกันเป็นกองได้ และในบริเวณที่แรงโน้มถ่วงหรือแรงกระทำจากภายนอกมีค่ามากกว่าแรงที่อนุภาคดึงดูดเข้าหากัน ก็จะทำให้อนุภาคหลุดออกและไหลลงด้านล่าง เหมือนส่วนที่อยู่บริเวณผิวด้านบนนอกของกองทราย



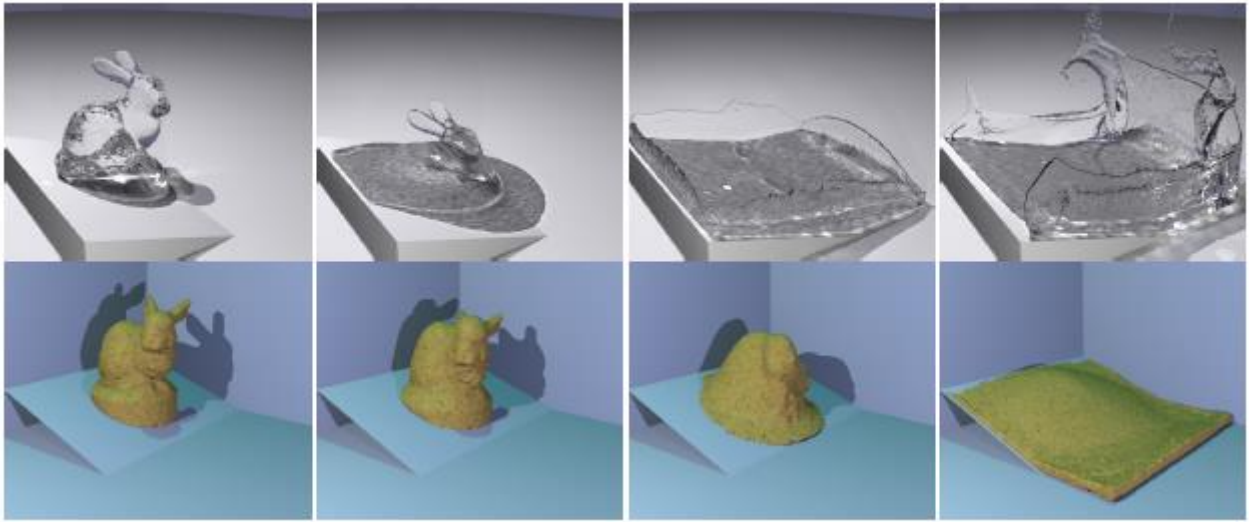
รูปที่ 9 การเปลี่ยนรูปทรงของอนุภาคและแรงยึดเกาะ [15]

เวลาต่อมาในงานวิจัย[16] ได้มีการนำแนวคิดการจำลองทรายด้วยอนุภาคมาพัฒนาต่อ โดยเปลี่ยนแนวคิดเกี่ยวกับอนุภาคที่สามารถเปลี่ยนรูปร่างได้ให้แต่ละอนุภาคเป็นวัตถุแข็งเกร็งที่มีโครงสร้างประกอบขึ้นจากทรงกลมหลายๆวง ดังในรูปที่ 10 ด้วยโครงสร้างใหม่นี้ทำให้อนุภาคสามารถลึกลงเข้าด้วยกันโดยที่ไม่ต้องมีการใส่แรงดึงเพิ่มเติมแบบในงานวิจัยก่อนหน้า และนอกจากนี้ยังได้มีการนำเสนอวิธีในการคำนวณแรงกระทำระหว่างอนุภาคเพิ่มเติมเช่นแรงเสียดทานทำให้มี การจำลองมีคุณสมบัติคล้ายทรายมากยิ่งขึ้น



รูปที่ 10 ทรงกลมที่ประกอบขึ้นเป็นโครงสร้างของอนุภาค [16]

นอกจากการนำลองโดยใช้อนุภาคแล้วอยากได้มีงานวิจัยที่นำวิธีการจากการจำลองของไหลเข้ามาประยุกต์ใช้ โดยเป็นการมองทรายให้เป็นกลุ่มก้อนของอนุภาคที่เคลื่อนที่ไปด้วยกัน ทำให้แบบจำลองสามารถทำการคำนวณในโปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้เร็วขึ้นมาก เช่นในงานวิจัย [14] เป็นการเริ่มต้นการจำลองทรายแบบแรกที่น่าโมเดลของการจำลองของไหลมาใช้ โดยที่มีการใส่เงื่อนไขการคำนวณเพิ่มเติมในการที่จะบอกว่าทรายส่วนไหนบ้างที่สามารถไหลได้เหมือนของไหลปกติ หรือส่วนไหนที่จะต้องหยุดการไหลและเปลี่ยนคุณสมบัติให้กลายเป็นวัตถุแข็งเกร็ง ทำให้ได้ผลลัพธ์ออกมาในรูปที่ 11



รูปที่ 11 การจำลองทรายโดยใช้วิธีของ [14] เทียบกับน้ำปกติ

จากงานวิจัยของ [14] จะยังสังเกตเห็นได้ว่าผลการจำลองที่ได้ออกมาแล้วยังมีลักษณะคล้ายๆทรายเปียกอยู่ในงานวิจัย [17] จึงได้นำเสนอวิธีการที่สามารถคำนวณแรงเสียดทานภายในของทรายเพิ่มขึ้นมา ซึ่งในโมเดลการจำลองของไหลทั่วไปจะสามารถคำนวณได้แค่แรงดันเท่านั้น ด้วยการคำนวณแบบใหม่ทำให้ผลลัพธ์เหมือนจริงมากขึ้น เช่น ทรายที่จำลองออกมาสามารถพุ่งในอากาศได้อย่างอิสระและ ไม่มีข้อเสียที่ทำให้การจำลองออกมาเหมือนทรายเปียกอีก ดังแสดงในรูปที่ 12



รูปที่ 12 การจำลองทรายโดยใช้วิธีของ [17]

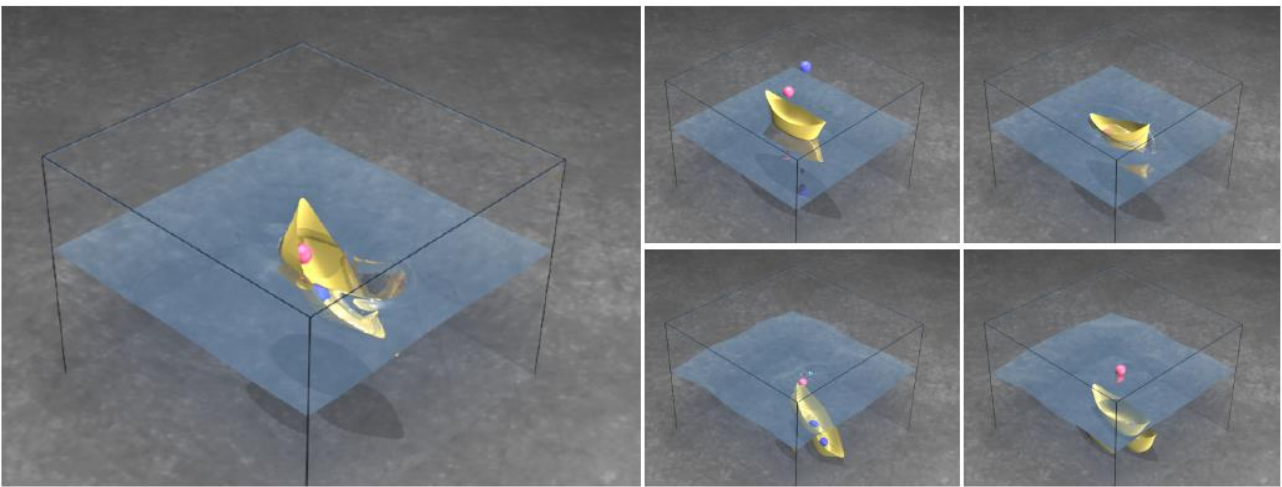
2.5. การถ่ายทอดแรงระหว่างวัสดุต่างชนิด

เหตุการณ์เช่น กล่องที่เป็นวัตถุแข็งเกร็งตกลงในน้ำสิ่งที่จะเกิดขึ้นคือ เมื่อกล่องกระทบน้ำจะทำให้บริเวณที่ตกกระทบกระจัดออกและกระเพื่อมออกไปเป็นวงรอบๆ โดยความแรงของการกระเพื่อมก็จะขึ้นอยู่กับความเร็ว ขนาดและน้ำหนักของกล่องที่ขณะที่กระทบผิวน้ำ กล่าวคือพลังงานที่เคยอยู่ในกล่องบางส่วนได้ถูกถ่ายทอดไปยังน้ำที่อยู่นิ่งๆ ทำให้เกิดคลื่นน้ำขึ้น

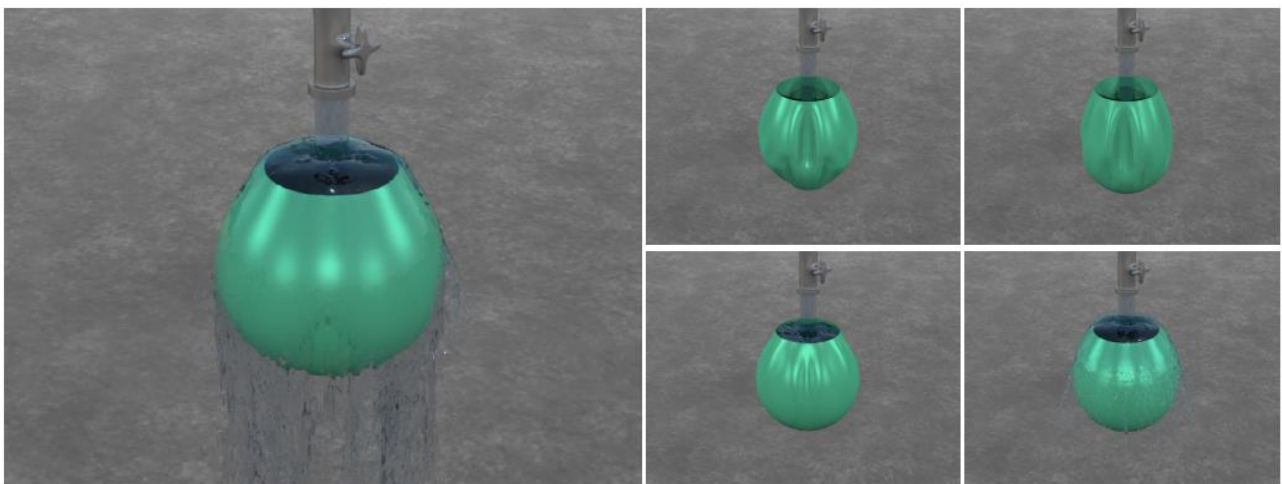
ในงานวิจัย [18] ได้นำเสนอวิธีเบื้องต้นสำหรับการและเปลี่ยนพลังงานระหว่างวัตถุแข็งเกร็งกับน้ำ โดยแบ่งการทำงานออกเป็นสองขั้นคือ เมื่อส่วนของวัตถุกระทบกับผิวน้ำจะให้ใช้ความเร็วของวัตถุไปดันน้ำที่บริเวณนั้นให้มีความเร็วที่เท่ากัน แล้วจึงแก้สมการการเคลื่อนที่ของระบบของไหลเพื่อให้ได้ความเร็วเร็วใหม่ของน้ำ จากนั้นจึงนำความเร็วของน้ำที่คำนวณได้ใหม่มาคำนวณหาว่าควรจะมีแรงผลัดกลับไปให้วัตถุในปริมาณเท่าไร การคำนวณเป็นสองขั้นแบบนี้สามารถทำได้ง่ายแต่จำเป็นที่จะต้องใช้เวลาของเฟรมที่เล็กมาก เนื่องจากการคำนวณแยกกันของระบบแบบนี้จะทำให้ผลลัพธ์มีความ

คลาดเคลื่อนไปได้มากถ้าขนาดเวลาของเฟรมมีค่ามากเกินไป หรืออาจไม่สามารถจำลองได้ถูกต้องในบางกรณี เช่น การจำลองกล่องที่มีน้ำอยู่เต็ม ที่การเคลื่อนที่ของผิวสัมผัสที่จุดหนึ่งจะทำให้บริเวณอื่นมีการเปลี่ยนแปลงไปด้วย

จากปัญหาการจำลองของเหลวกับของแข็ง มีงานวิจัยหลายๆงานได้เสนอวิธีการในการรวมให้การคำนวณแบบจำลองของทั้งสองระบบเกิดขึ้นพร้อมๆกัน [13,19] ซึ่งคือการนำสมการของทั้งของแข็งและของเหลวมารวมกันโดยมีตัวเชื่อมเป็นตัวแปรของพลังงานที่มีการถ่ายทอดระหว่างระบบ ในงานของ [17] ได้นำเสนอการถ่ายทอดแรงระหว่างทรายกับวัตถุแข็งเกร็งที่ใช้วิธีการนี้เช่นเดียวกัน และในงานของ [20,21] ได้เสนอวิธีการจัดรูปของสมการแบบใหม่ที่สามารถ จำลอง ของไหล วัตถุแข็งเกร็งและ วัสดุยืดหยุ่นได้พร้อมๆกัน แต่จนถึงปัจจุบันยังไม่ม้งานวิจัยใดที่ได้นำเสนอวิธีการสำหรับจำลองระบบที่มีทั้งของเหลว ของแข็งและทราย ให้ทำงานร่วมกันได้



รูปที่ 13 ตัวอย่างแบบจำลองในงานของ [20] ที่มีน้ำกับวัตถุแข็งเกร็งทั้งแบบแผ่นบางและทรงกลม



รูปที่ 14 ตัวอย่างแบบจำลองในงานของ [20] ที่มีวัสดุยืดหยุ่นกับน้ำ

3. วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

เพื่อคิดค้น สร้างและพัฒนาขั้นตอนวิธีสำหรับการจำลองการทำงานของ Universal Jamming Gripper ลงในโปรแกรม

4. ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

4.1. Backward Euler

โดยทั่วไปเราสามารถประมาณการณื ตำแหน่งและความเร็วที่เปลี่ยนไปของวัตถุได้จากสมการ Forward Euler

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta v \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} v_0 \\ M^{-1} f_0 \end{pmatrix}$$

จากสมการแรงกระทำ f_0 นิยามโดย $f_0 = f(x_0, v_0)$ ซึ่งก็คือแรงที่เกิดขึ้นจะขึ้นอยู่กับตำแหน่งและความเร็วเริ่มต้น และ h คือเวลาที่ผ่านไป ซึ่งต้องใช้ h ที่มีขนาดเล็กมาก ถึงจะทำให้ระบบที่ใช้ Forward Euler มีความเสถียรในการคำนวณได้ อย่างที่มีการทดสอบให้ดูเป็นตัวอย่างใน [22] เปรียบเทียบกับสมการ Backward Euler

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta v \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} v_{0+\Delta v} \\ M^{-1} f(x_0 + \Delta x, v_0 + \Delta v) \end{pmatrix}$$

ความแตกต่างระหว่างสองวิธีการนี้อยู่ที่ สมการแบบ Forward Euler นั้นจะใช้ของมูลจากแค่ตอนเริ่มต้นเท่านั้น แต่สมการ Backward Euler จะให้ความสำคัญกับแรงที่เปลี่ยนไประหว่างการเคลื่อนที่ด้วย แต่จะเห็นว่ารูปสมการของ Backward Euler นั้นไม่ใช่สมการเชิงเส้น เพื่อให้ง่ายในการแก้สมการจึงใช้การประมาณด้วย Taylor series เข้ามาช่วย

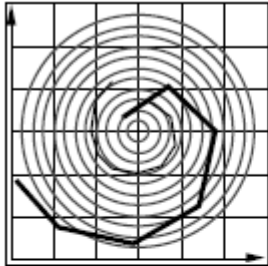
$$f(x_0 + \Delta x, v_0 + \Delta v) = f_0 + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial v} \Delta v$$

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta v \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} v_{0+\Delta v} \\ M^{-1} \left(f_0 + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial v} \Delta v \right) \end{pmatrix}$$

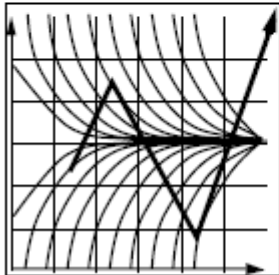
จากนั้น จึงนำสมการด้านล่างมาจัดรูปใหม่ เพื่อแก้หาค่า Δv จะได้

$$\left(I - hM^{-1} \frac{\partial f}{\partial v} - h^2 M^{-1} \frac{\partial f}{\partial x} \right) \Delta v = hM^{-1} \left(f_0 + h \frac{\partial f}{\partial x} v_0 \right)$$

แล้วจึงนำ ค่า Δv มาแทนค่ากลับในสมการเพื่อหาค่า Δx ซึ่งการแก้สมการการเคลื่อนที่ด้วย Backward Euler นั้นจะหาค่า h ที่ขนาดใหญ่ได้โดยที่ไม่มีปัญหาเรื่องความเสถียรของการคำนวณ



Inaccuracy:
Error turns $x(t)$ from a circle into the spiral of your choice.



Instability: off to Neptune!

รูปที่ 15 ตัวอย่างความผิดพลาดที่เกิดขึ้นเมื่อประมาณการด้วย Forward Euler [22]

4.2. Conjugate gradient solver

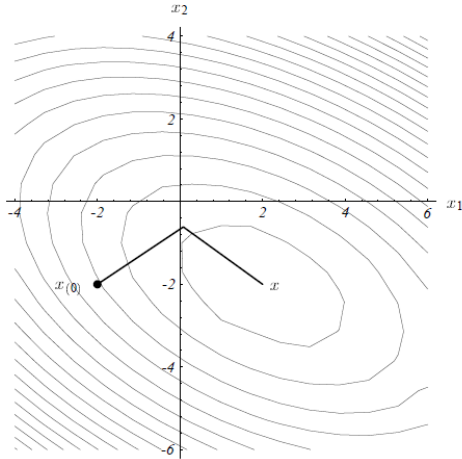
เป็นขั้นตอนวิธีการแก้สมการเชิงเส้น $Ax = b$ เหมาะสำหรับกรณีที่ A เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาดใหญ่มากๆจนทำให้ไม่การแก้สมการโดยตรงทำได้ช้ามากหรือไม่สามารถทำได้ แต่มีเงื่อนไขว่าเมทริกซ์ A จะต้องมีความสมบัติเป็น Symmetric Positive Definite วิธีการนี้จะทำงานโดยการวนลูปซ้ำเพื่อนำคำตอบ x ก่อนหน้าไปคำตอบใหม่ที่ดีขึ้น ซึ่งจะช้าไปเรื่อยๆจนกระทั่งถึงเกณฑ์ที่ยอมรับได้หรือมากกว่าจำนวนรอบที่กำหนดไว้ ตามรายละเอียดเพิ่มเติมใน [23]

```

i ← 0
r ← b - Ax
d ← r
δnew ← rTr
δ0 ← δnew
While i < imax and δnew > ε2δ0 do
  q ← Ad
  α ← δnew / dTq
  x ← x + αd
  If i is divisible by 50
    r ← b - Ax
  else
    r ← r - αq
  δold ← δnew
  δnew ← rTr
  β ← δnew / δold
  d ← r + βd
  i ← i + 1

```

รูปที่ 16 ขั้นตอนวิธีการหาคำตอบด้วย Conjugate gradient A, b เป็นค่าของสมการเชิงเส้น และ x_0 เป็นค่าเริ่มต้น [23]



รูปที่ 17 ตัวอย่างการสุ่มเข้าหาคำตอบจากค่าเริ่มต้น x_0 ในกรณีที่มี 2 ตัวแปร [23]

4.3. Incompressible Navier-Stokes Equations

Navier-Stokes เป็นสมการที่ได้รับความนิยมสำหรับใช้ในการจำลองวัตถุประเภทของไหล ที่สามารถเขียนในรูปทั่วไปได้ เป็น

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u + \frac{1}{\rho} \nabla p = g + \mu \nabla \cdot \nabla u$$

โดยที่ u คือความเร็ว, p คือแรงดัน, ρ คือค่าความหนาแน่น, g คือแรงดึงดูด และ μ ค่าสัมประสิทธิ์ความหนืด จากสมการข้างต้นสามารถอธิบายโดยแบ่งออกเป็นส่วนๆ ได้ดังนี้

$\frac{\partial u}{\partial t}$	ความเร่งที่เกิดขึ้น
$u \cdot \nabla u$	การเปลี่ยนแปลงความเร็วที่เปลี่ยนไปตามการไหลของน้ำไปยังที่ใหม่
$\frac{1}{\rho} \nabla p$	ความเร่งที่เกิดจากความแตกต่างของแรงดัน
$\mu \nabla \cdot \nabla u$	แรงต้านของความหนืดที่มีทิศตรงข้ามกับการไหลของน้ำ

โดยปกติสมการ Navier-Stokes จะใช้ร่วมกับเงื่อนไข Incompressible

$$\nabla \cdot u = 0$$

ซึ่งจะหมายถึงถ้ามองบริเวณเล็กๆจุดใดจุดหนึ่ง ปริมาณน้ำที่ไหลเข้ากับไหลออกต้องเท่ากัน

5. แนวคิดของการวิจัยและวิธีการดำเนินงาน

5.1. แนวคิดของงานวิจัย

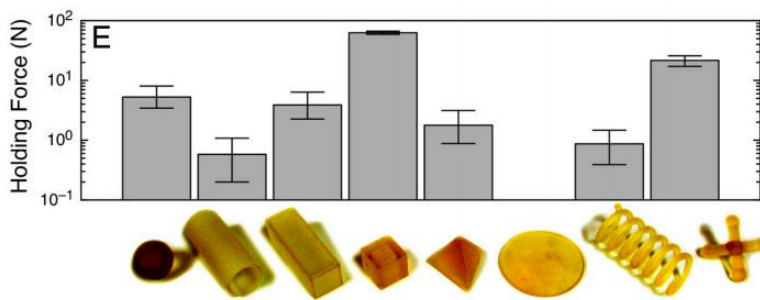
สืบเนื่องจาก Universal Jamming Gripper นั้นอาศัยหลักการทำงานของวัสดุหลายประเภทร่วมกัน ดังนั้นในปัจจุบันยังไม่มียานวิจัยใดที่มีวิธีการจำลองที่สามารถครอบคลุมความต้องการของมือจับหุ่นยนต์ชนิดนี้ได้หมด ถึงแม้จะไม่ครอบคลุมทั้งหมดแต่ก็มีงานวิจัยที่น่าเสนอโดย [21] สามารถทำได้ใกล้เคียงและน่าจะนำมาต่อยอดได้ โดยในงานวิจัยนี้สามารถที่จำลองการทำงานของระบบที่มีส่วนประกอบของ วัตถุแข็งเกร็ง วัตถุยืดหยุ่น ของไหล เข้าไว้ด้วยกัน และในงานวิจัยของ [17] ก็ได้นำเสนอวิธีการในการจำลองวัสดุประเภททรายที่มีคุณสมบัติใกล้เคียงกับของจริงมากที่สุดเทียบกับงานก่อนๆหน้า

ในงานวิจัยนี้จึงมีแนวคิดที่จะนำงานวิจัยที่ได้กล่าวถึงก่อนหน้าทั้งสองมารวมกัน แต่จากการศึกษาเบื้องต้นพบว่า เราไม่

สามารถที่จะนำวิธีการจำลองทรายในงานของ [17] ใส่ลงในงานของ [21] ได้โดยตรง จึงเป็นจุดสำคัญของงานวิจัยที่จะสามารถแปลงหรือปรับเปลี่ยนโครงสร้างของทั้งสองระบบให้ทำงานร่วมกันได้อย่างไร

5.2. การวัดผลการทดลอง

ทำการทดสอบในโปรแกรมคอมพิวเตอร์จำลองเสมือนว่า โมเดลที่จำลองมานั้นสามารถเปลี่ยนรูปไปตามแรงกระทำภายนอกได้หรือไม่ และสามารถเปลี่ยนสถานะเป็นวัตถุแข็งเกร็งได้หรือไม่เมื่อทำการทดลองดูอากาศภายในออกหรือทำให้แรงดันภายในมีค่าลบ จากนั้นจะทดสอบเทียบกับมือจับของจริงว่าการเปลี่ยนรูปร่างและการจับวัตถุสามารถทำได้คล้ายคลึงกันหรือไม่ โดยวัดที่ความสามารถในการออกแรงดึงวัตถุแต่ละรูปทรง ว่าการจำลองและการทดสอบจริงได้ค่าใกล้เคียงกันหรือไม่ ยกตัวอย่างดังในรูปที่ 18 ซึ่งเป็นการทดลองของ [1] เพื่อวัดความสามารถของ Universal Jamming Gripper



รูปที่ 18 การวัดผลแรงดึงวัตถุแต่ละชนิดของ มือจับ Universal Jamming Gripper ใน [1]

6. ขอบเขตของงานวิจัย

- 6.1. คิดค้น ขั้นตอนวิธีสำหรับการจำลอง การทำงานของ Universal Jamming Gripper
- 6.2. นำขั้นตอนวิธีที่ได้คิดค้นขึ้นเพื่อพัฒนาโปรแกรมจำลองเสมือนสำหรับทดสอบวัดผล
- 6.3. สร้างต้นแบบอย่างง่ายของ Universal Jamming Gripper ขึ้นมาเพื่อทดสอบวัดผลโปรแกรมจำลอง

7. ขั้นตอนการดำเนินงาน

- 7.1. ศึกษาทฤษฎีพื้นฐานที่เกี่ยวข้อง การจำลองโมเดลเสมือนที่อิงบนหลักฟิสิกส์
- 7.2. ศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับวัตถุที่ต้องใช้ในการจำลอง
 - 7.2.1. วัตถุแข็งเกร็ง
 - 7.2.2. วัตถุยืดหยุ่น
 - 7.2.3. ของไหล
 - 7.2.4. วัสดุประเภททราย
- 7.3. ศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องของการโอนถ่ายแรงระหว่างวัสดุมากกว่าหนึ่งชนิด
- 7.4. คิดค้นวิธีการสร้างโมเดลจำลองเสมือน ของ Universal Jamming Gripper
- 7.5. ดำเนินงานพัฒนาโปรแกรมจำลองเสมือน
- 7.6. เปรียบเทียบและวัดผล
- 7.7. สรุปผลการทดลอง และทำการเรียบเรียงรูปเล่มวิทยานิพนธ์

8. เอกสารอ้างอิง

- [1] E. Brown, N. Rodenberg, J. Amend, A. Mozeika, E. Steltz, M. Zakin, H. Lipson, H. Jaeger. 2010. "Universal robotic gripper based on the jamming of granular material," The National Academy of Sciences (PNAS), Vol. 107, no. 44, pp.18809-18814.
- [2] D. Baraff. 1989. "Analytical methods for dynamic simulation of non-penetrating rigid body," SIGGRAPH '89, Vol 23, no. 3, pp. 223-232
- [3] J.C. Platt, A.H. Barr. 1988. "Constraint methods for flexible models," SIGGRAPH '88, Vol 22, no. 4, pp. 279-288.
- [4] M. Moore, J.Wilhelms. 1988. "Collision Detection and Response for Computer Animation," SIGGRAPH '88, Vol 22, no.4, pp.289-298.
- [5] S.F. Gibson, B. Mirtich. "A survey of deformable models in computer graphics," Technical Report TR-97-19.
- [6] A. Nealen, M. Muller, R. Keiser, E. Boxermann, M. Carlson. 2005. "Physically based deformable models in computer graphics," Eurographics STAR, 1997.
- [7] D. Terzopoulos and K. Waters. "Physically-based facial modeling, analysis, and animation," Journal of Visualization and Computer Animation, pp.73-80, 1990.
- [8] J.F. O'Brien, J.K. Hodgins. "Graphical modeling and animation of brittle fracture", SIGGRAPH '99, pp. 127-146, 1999.
- [9] G. DeBunne, M. Desbrun, M.P. Cani, A. Barr. "Dynamic real-time deformations using space & time adaptive sampling," SIGGRAPH '01, pp. 31-36, 2001.
- [10] R.A. Gingold and J.J. Monaghan, "Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars," Mon. Not. R. Astron. Soc., Vol 181, pp. 375-389, 1977.
- [11] R. Bridson, M. Muller-Fischer, E. Guendelman, R. Fedkiw, "Fluid Simulation", SIGGRAPH '06 course notes, 2006.
- [12] C. Farhat, M. Lesoinne, P. Le Tallec, "Load and motion transfer algorithms for fluid/structure interaction problems with non-matching discrete interfaces: momentum and energy conservation, optimal discretization and application to aeroelasticity", Computer methods in applied mechanics and engineering, 157(1-2):95-114, 1998.
- [13] C. Batty, F. Bertails, R. Bridson. "A fast variational framework for accurate solid-fluid coupling", ACM Trans. Graph. 26, 3, Article 100, 2007.
- [14] Y. Zhu, R. Bridson. "Animating sand as a fluid," SIGGRAPH '05, pp. 965-972, 2005.
- [15] A. Luciani, A. Habibi, E. Manzottie. "A multi-scale physical model of granular materials," In Proceedings of Graphics Interface '95, pp. 136-146, 1995.
- [16] N. Bell, Y. Yu, P.J. Mucha. "Particle-based simulation of granular materials," SCA '05, pp. 77-86, 2005.
- [17] R. Narain, A. Golas, M.C. Lin. "Free-Flowing Granular Materials with Two-Way Solid Coupling," SIGGRAPH Asia '10, Article no. 173, 2010.
- [18] T. Takahashi, H. Ueki, A. Kunimatsu, H. Fuji. "The simulation of fluid-rigid body interaction," SIGGRAPH '02, pp. 266-266, 2002.
- [19] N. Chentanez, T.G. Goktekin, B.E. Feldman, J.F. O'Brien. "Simultaneous coupling of fluids and deformable bodies," SCA '06, pp. 83-89, 2006.
- [20] A. Robinson-Mosher, T. Shinar, J. Gretarsson, J. Su, R. Fedkiw. "Two-way coupling of fluids to rigid and deformable solids and shells," SIGGRAPH '08, Article no. 46, 2008.
- [21] A. Robinson-Mosher, C. Schroeder, R. Fedkiw. "Asymmetric positive definite formulation for monolithic fluid structure interaction," Journal of Computational Physics, Vol 230, No. 4, pp. 1547-1566, 2011.
- [22] D. Baraff, A. Witkin. "Physically Based Modeling," SIGGRAPH '01 course notes, 2001.
- [23] J. Shewchuk. "An introduction to the conjugate gradient method without the agonizing pain," Technical Report CMU-CS-TR-94-125, Carnegie Mellon University, 1994.
- [24] M. Muller, D. Charypar, M. Gross. "Particle-based fluid simulation for interactive applications," SCA '03, pp 154-159, 2003.